

Função Racional- expressão do tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$ em que o numerador e o denominador são polinómios em x

Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ (conjunto de valores de R que não anulem o denominador)

Contradomínio: conjunto das imagens

Intersecção com os eixos coordenados

Intersecção com o eixo Ox (zeros da função): $P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0$

Intersecção com o eixo Oy (ordenada na origem) : $f(0)$ se $0 \in D_f$

Assintotas

Seja a função racional: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$

Assintota horizontal (y=b):

Se $n < m$, a reta $y=0$ é Assintota horizontal, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Se $n = m$, a reta $y = \frac{a_n}{b_m}$ é Assintota horizontal, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

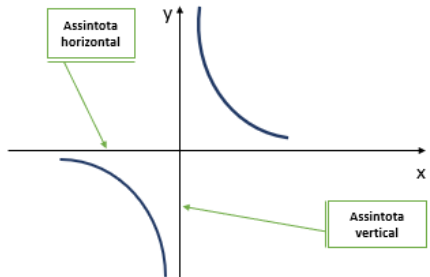
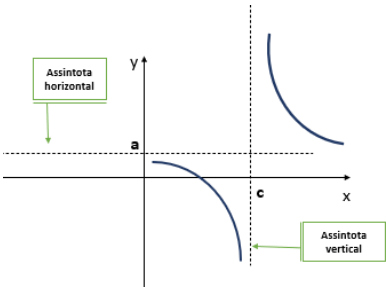
Se $n > m$, o gráfico de f não tem assintotas horizontais, pode ter oblíqua

Assintota vertical (x=a): $x=a$ (quando $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$)

Assintota oblíqua (y=mx+b): (quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = mx + b$)

Acontece quando grau de $P(x)$ é superior a uma unidade ao grau de $Q(x)$ ($n > m$ com $n-m=1$)

Tipos de funções racionais

$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = a + \frac{b}{x-c}$
Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Domínio: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - c \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$
Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Contradomínio: $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{a\}$
Assintotas:  Assintota horizontal : $y=0$ Assintota vertical : $x=0$	Assintotas  Assintota horizontal : $y=a$ Assintota vertical : $x=c$

Polinómios- expressão algébrica da forma: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ (polinómio de grau n)

Se todos os coeficientes forem nulos o polinómio chama-se polinómio nulo

Grau do polinómio- valor do maior expoente

Operações com polinómios:

- **Adição**- somam-se os coeficientes com igual parte literal
- **Subtração**- subtraem-se os coeficientes de termos coincidentes
- **Multiplicação**- utiliza-se a propriedade distributiva da multiplicação.
- **Divisão**- utiliza-se a divisão inteira de polinómios ou a regra de Ruffini

$$\begin{array}{l} A(x) \overline{) B(x)} \\ R(x) \overline{) Q(x)} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x) \\ \text{grau de } R(x) < \text{grau de } B(x) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Onde:

- **A(x)**: é o dividendo;
- **B(x)**: é o divisor;
- **Q(x)**: é o quociente;

A regra de Ruffini é um processo prático e rápido para determinar o polinómio quociente e o polinómio resto da divisão inteira de dois polinómios quando o divisor é da forma $x - a$. Sendo 1 o grau de $x - a$, o resto da divisão é uma constante e o quociente tem grau $n - 1$ (n é o grau do polinómio dividendo)

Coeficientes de $P(x)$						
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	b_0
a		$a \times q_{n-1}$	$a \times q_{n-2}$	...	$a \times q_1$	$a \times q_0$
	q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	...	q_1	q_0
Coeficientes de $Q(x)$						Resto

A Regra de Ruffini com divisor do tipo $ax-b$, $a \neq 0$

Se a divisão de um polinómio $A(x)$ por um polinómio do tipo $ax-b$, $a \neq 0$

$$\begin{array}{l} A(x) \overline{) ax-b} \\ R \overline{) Q(x)} \end{array}$$

Sabe-se $A(x) = (ax-b)Q(x) + R \Leftrightarrow a(x - \frac{b}{a})Q(x) + R \Leftrightarrow (x - \frac{b}{a})aQ(x) + R$ desta igualdade $Q_1(x) = aQ(x)$, sendo $Q(x)$ o quociente da divisão de $A(x)$ por $ax-b$ logo $Q(x) = \frac{1}{a}Q_1(x)$

Teorema do Resto: o resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por um binómio $(x-a)$ é igual ao valor numérico do polinómio para $x=a$, ou seja, $P(a)$. Se o divisor é um binómio do tipo $(ax-b)$, o resto é dado por $P(\frac{a}{b})$

a é raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(a)=0 \Leftrightarrow x - a$ é divisor de $P(x)$

Decomposição de polinómios em fatores

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots,$$

$x_1, x_2, x_3, \dots$ são os zeros do polinómio